

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТАКТА ПРИ ЛИНЕЙНОМ КАСАНИИ ВЗАИМООГИБАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.Б. Виноградов

Сибирский государственный университет путей сообщения. г. Новосибирск
E-mail: Vinogradov@mail.ru

Излагается дифференциальный метод определения скорости контакта по огибаемой и огибающей поверхности. Предложенным методом произведено исследование скорости перемещения контакта по поверхности зуба колеса в ортогональной глобоидной передаче с исходным цилиндрическим эвольвентным колесом.

Для оценки условий смазки и износа контактирующих поверхностей деталей машин наряду с характеристиками геометрии контакта (приведенная кривизна, длина контактной линии) важно иметь данные о скорости перемещения контакта по этим поверхностям. Теория гидродинамической смазки предписывает определять эту скорость в направлении, перпендикулярном касательной к контактной линии. При исследовании износостойкости скорость перемещения контакта по рабочей поверхности рассчитывают в направлении относительной скорости скольжения. В общем случае линейного касания взаимогогибаемых поверхностей расчет скорости контакта по огибаемой поверхности не трудно произвести, если иметь уравнение контактных линий на этой поверхности. Однако если требуются данные о скорости контакта по огибающей поверхности, задача оказывается сложной из-за обычно громоздких уравнений этой поверхности.

В статье рассматривается дифференциальный метод, с одинаковой простотой пригодный для определения скорости контакта как по огибаемой, так и огибающей поверхности.

Существо метода заключается в том, что элемент перемещения контакта по огибающей или огибаемой поверхности рассчитывается в неподвижной системе координат.

Предположим, имеются две взаимогогибаемые поверхности Π_1 и Π_2 , контактирующие между собой по пространственной кривой М–М. Выберем три ортогональные системы координат:

- x_1, y_1, z_1 , жестко связанную с поверхностью Π_1 ;
- систему x_2, y_2, z_2 , жестко связанную с поверхностью Π_2 ;
- неподвижную систему x, y, z (рис. 1).

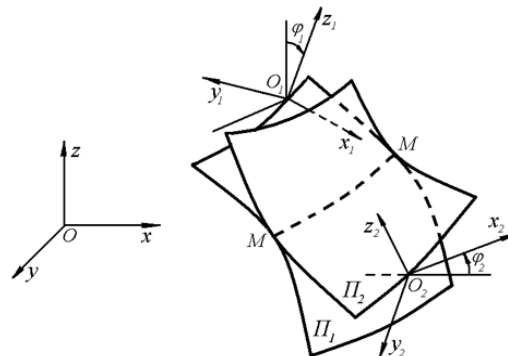


Рис. 1. Расчетная схема

Пусть движение поверхности Π_1 относительно неподвижной системы координат характеризуется уравнением

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_1(x, y, z, \varphi_1) \quad (1)$$

и уравнением обратного перехода

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_1, y_1, z_1, \varphi_1). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{S}_1 и \mathbf{S} – радиус-вектор точки соответственно в системе x_1, y_1, z_1 и системе x, y, z ; φ_1 – параметр, характеризующий относительное движение.

Движение поверхности Π_2 относительно неподвижной системы координат будем характеризовать уравнением

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2(x, y, z, \varphi_2) \quad (3)$$

и уравнением обратного перехода

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_2, y_2, z_2, \varphi_2). \quad (4)$$

Здесь \mathbf{S}_2 – радиус-вектор точки в системе x_2, y_2, z_2 ; φ_2 – параметр, характеризующий относительное движение.

Важной характеристикой относительного движения подвижных систем здесь является связь между параметрами φ_1 и φ_2 . При наиболее простой линейной зависимости между ними выражения для первой и второй дифференциальных характеристик [1] имеют вид:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = u; \quad \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{du}{d\varphi_1} = 0,$$

где u — носит название передаточного отношения.

В этом случае интегральной характеристикой будет

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = u. \quad (5)$$

Для простоты дальнейшего изложения принимаем $u = \text{const}$.

Выражения (1–5) дают возможность установить связь между дифференциальными элементами взаимноогibaемых поверхностей. Пусть далее $F_1(x, y, z) = 0$ — уравнение огибаемой поверхности Π_1 . Выражение для контактной линии на этой поверхности можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ f_{1x}(x_1, y_1, z_1, u, \varphi_1) \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + f_{1y}(x_1, y_1, z_1, u, \varphi_1) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} &= f_{1z}(x_1, y_1, z_1, u, \varphi_1), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где второе уравнение — уравнение связи между координатами точки и параметром относительного движения φ_1 . Функции f_{1x} , f_{1y} и f_{1z} представляют множители так называемого дифференциального комплекса [2].

Переписывая ур. (6) при помощи формулы (1), получаем уравнение контактных линий в неподвижной системе координат, называемое уравнением поверхности зацепления:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ f(x, y, z, u, \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Дифференцируем это уравнение по координатам и параметру φ_1 . Исключая $d\varphi_1$, записываем выражение для элемента поверхности зацепления:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0. \quad (8)$$

Предположим, необходимо определить скорость точки контактной линии по огибающей поверхности в направлении, перпендикулярном касательной к контактной линии. Для этого дифференцируем по координатам и параметру φ_2 ур. (4):

$$dS = dS(dx_2, dy_2, dz_2, d\varphi_2, x_2, y_2, z_2, \varphi_2). \quad (9)$$

В выражении (9) координаты x_2 , y_2 и z_2 заменяем соответствующими значениями этих координат из ур. (3), а проекции дифференциального элемента поверхности Π_2 : dx_2 , dy_2 и dz_2 заменяем их значениями из дифференцированного по координатам ур. (3):

$$dS_2 = dS_2(dx_{\Pi_2}, dy_{\Pi_2}, dz_{\Pi_2}, \varphi_2).$$

Здесь дифференциалам dx , dy , dz придан индекс Π_2 , поскольку они выражают элементарное перемещение точки по поверхности Π_2 в неподвижной системе координат.

В результате подстановки ур. (9) приводится к виду

$$dS = dS(dx_{\Pi_2}, dy_{\Pi_2}, dz_{\Pi_2}, d\varphi_2, x, y, z, \varphi_2). \quad (10)$$

Если объединить уравнения (8) и (10) в систему

$$\left. \begin{aligned} Adx + Bdy + Cdz &= 0, \\ dS &= dS(dx_{\Pi_2}, dy_{\Pi_2}, dz_{\Pi_2}, d\varphi_2, x, y, z, \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

то получим выражение для элементарного перемещения по поверхности Π_2 , записанное в неподвижной системе координат.

Чтобы выразить элементарное перемещение в направлении, перпендикулярном контактной линии, необходимо и достаточно на зависимость (11) наложить условие в виде дифференциального элемента линии (в точке контакта), представляющего пересечение элементов касательной плоскости и плоскости, нормальной касательной к линии контакта:

$$\left. \begin{aligned} dz_{\Pi_2} &= \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial x_{\Pi}} dx_{\Pi_2} + \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial y_{\Pi}} dy_{\Pi_2}, \\ T_x dx_{\Pi_2} + T_y dy_{\Pi_2} + T_z dz_{\Pi_2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Здесь } \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial x_{\Pi}} = \frac{\partial z_{\Pi_1}}{\partial x_{\Pi_1}} = \frac{\partial z_{\Pi_2}}{\partial x_{\Pi_2}} \text{ и } \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial y_{\Pi}} = \frac{\partial z_{\Pi_1}}{\partial y_{\Pi_1}} = \frac{\partial z_{\Pi_2}}{\partial y_{\Pi_2}},$$

поскольку в точке касания взаимноогibaемых поверхностей имеет место общая касательная плоскость; T_x , T_y и T_z — величины, пропорциональные косинусам углов, составленных касательной к контактной линии и осями координат.

Итак, совместное решение уравнений системы

$$\left. \begin{aligned} Adx + Bdy + Cdz &= 0, \\ dS &= dS(dx_{\Pi_2}, dy_{\Pi_2}, dz_{\Pi_2}, d\varphi_2, x, y, z, \varphi_2), \\ dz_{\Pi_2} &= \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial x_{\Pi}} dx_{\Pi_2} + \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial y_{\Pi}} dy_{\Pi_2}, \\ T_x dx_{\Pi_2} + T_y dy_{\Pi_2} + T_z dz_{\Pi_2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

относительно dx_{Π_2} , dy_{Π_2} и dz_{Π_2} позволяет выразить интересующее нас перемещение:

$$dS_{\Pi_2} = \sqrt{dx_{\Pi_2}^2 + dy_{\Pi_2}^2 + dz_{\Pi_2}^2}.$$

Если вынести дифференциал $d\varphi_2$, то это перемещение можно представить в виде:

$$dS_{\Pi_2} = r_{\Pi_2} d\varphi_2, \quad (12)$$

где r_{Π_2} — множитель, являющийся функцией координат точки, передаточного отношения u и параметра φ_2 .

Но

$$d\varphi_2 = \omega_2 dt, \quad (13)$$

где $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$ — угловая скорость.

Подставляя зависимость (13) в выражение (12), получаем формулу для определения мгновенной скорости точки контактной линии в заданном направлении:

$$V_{\Pi_2} = r_{\Pi_2} \omega_2.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для скорости контактной точки в заданном направлении по огибаемой поверхности:

$$V_{\Pi_1} = r_{\Pi_1} \omega_1, \quad (14)$$

где ω_1 – угловая скорость звена с поверхностью Π_1 .

Данным методом произведено исследование скорости перемещения контакта по поверхности зуба колеса в ортогональной глобоидной передаче с исходным цилиндрическим эвольвентным колесом.

При выбранной системе координат (рис. 2) и однопараметрическом задании эвольвентной винтовой поверхности (огибаемой) зуба колеса уравнение поверхности зацепления можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} x \cos \theta - y \sin \theta &= r_{b1}, \\ -y + z \cos \theta \operatorname{tg} \delta &= r_{w1}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь $\theta = \varphi_1 + \vartheta$; ϑ – угловой параметр эвольвентного геликоида; r_{b1} – радиус основного цилиндра колеса; δ – угол наклона образующей эвольвентного геликоида; r_{w1} – радиус начальной окружности.

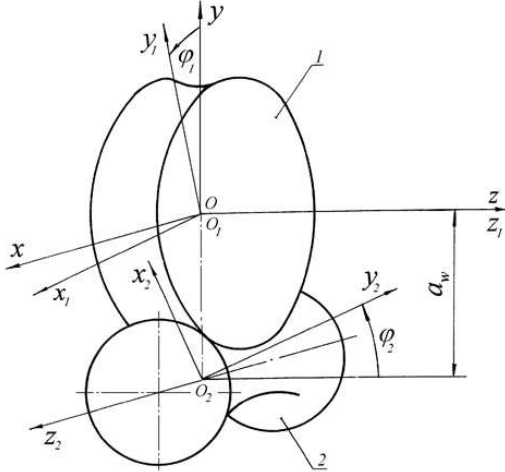


Рис. 2. Система координат передачи

Продифференцировав ур. (15) по координатам и параметру θ и исключив $d\theta$, получим дифференциальное уравнение поверхности зацепления:

$$dx + a dy + b dz = 0, \quad (16)$$

где $a = \frac{y \cos^2 \theta + r_{b1} \sin \theta - r_{w1} \sin^2 \theta}{\sin \delta \cos \theta (\cos \theta - a \sin^2 \theta)}$, $b = -\operatorname{tg} \delta (\sin \theta + a \cos \theta)$.

Для перехода от системы x_1, y_1, z_1 к системе x, y, z имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= -x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \\ z &= z_1, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и обратно

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_1 - y \sin \varphi_1, \\ y_1 &= x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1, \\ z_1 &= z, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где φ_1 – угол поворота колеса.

Путем дифференцирования уравнений (17 и 18) согласно изложенной методике получаем выражение, связывающее элементарное перемещение в неподвижной системе координат с возможным элементарным перемещением точки в системе колеса:

$$\left. \begin{aligned} dx &= dx_K + y d\varphi_1, \\ dy &= dy_K - x d\varphi_1, \\ dz &= dz_K. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь dx_K, dy_K, dz_K – проекции возможного элементарного перемещения (в системе колеса), переписанного в неподвижную систему.

Система ур. (16 и 19) выражает возможное элементарное перемещение по зубу колеса в неподвижной системе координат.

Дифференцирование уравнения поверхности зацепления при фиксированном угле поворота φ_1 позволяет найти значения для коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{T_y \sin \theta \cos \theta + y + r_{b1} \sin \theta}{\cos^2 \theta}, \\ T_y &= -r_{b1} \sin^2 \delta \sin \theta, \\ T_z &= \frac{T_y \cos \theta + (y + r_{b1}) \sin \theta}{\operatorname{tg} \delta \cos^2 \theta}, \end{aligned} \right\}$$

представляющие величины, пропорциональные косинусам углов между касательной линией и осями координат.

Следовательно,

$$T_x dx_K + T_y dy_K + T_z dz_K = 0$$

является уравнением элемента плоскости, перпендикулярной касательной к контактной линии.

Поэтому, выражение элемента линии в точке контакта имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} dz_K &= r_{b1} dx_K + q dy_K, \\ T_x dx + T_y dy + T_z dz &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где в первом уравнении элемента касательной плоскости в точке контакта

$$\begin{aligned} p &= -\operatorname{tg} \delta \sin \theta, \\ q &= -\operatorname{tg} \delta \cos \theta. \end{aligned}$$

Итак, система, составленная из уравнений (16, 19, 20)

$$\left. \begin{aligned} dx + a dy + b dz &= 0, \\ dx &= dx_K + y d\varphi_1, \\ dy &= dy_K - x d\varphi_1, \\ dz &= dz_K, \\ dz_K &= r_{b1} dx_K + q dy_K, \\ T_x dx + T_y dy + T_z dz &= 0, \end{aligned} \right\}$$

выражает перемещение точки линии контакта по зубу колеса в заданном направлении. Решением этой системы уравнений получим формулу для множителя r_{Π_1} , входящего в зависимость (14):

$$r_{\Pi} = r_K = \frac{ax - y}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}. \quad (21)$$

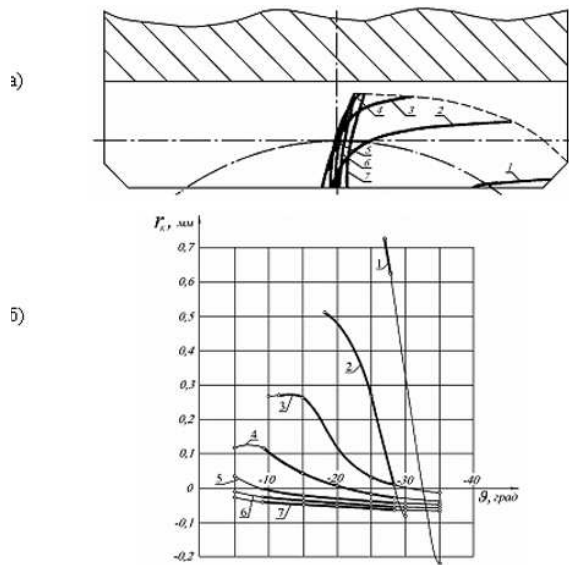


Рис. 3. Картина изменения r_K в зависимости от положения контактной точки на зубе колеса. Кривая соответствует ω_1 : 1) 116, 2) 107, 3) 98, 4) 90, 5) 81, 6) 72, 7) 63°

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин Н.И. Аналитические основы дифференциального исследования зубчатых зацеплений // Тр. Ин-та машиноведения АН СССР. Семинара по теории машин и механизмов. — 1957. — Т. 16. — Вып. 64. — С. 26–53.

Заметим, что при $\omega_1 = \text{const}$ скорость контакта пропорциональна множителю r_{Π} и, следовательно, достаточно исследовать функцию (21), чтобы получить картину изменения самой скорости.

Нами был исследован вариант глобоидной пары с параметрами $u=41$; $a_w=80$ мм и радиусом r_{w1} , совпадающим с радиусом r_1 делительной окружности колеса. Контактные линии на зубе колеса, построенные через равные интервалы угла ω_1 поворота колеса, изображены на рис. 3, а.

Углы $\omega_1=107^\circ$ и 117° соответствуют входу витков червяка в зацепление, а углы $\omega_1=63^\circ$ и 72° — выходу.

На рис. 3, б, показан характер изменения множителя r_K в масштабе $1:\omega_1$ скорости перемещения контакта V_K . Можно видеть, что действительно скорости точек контактных линий на входе максимальны, а на выходе минимальны и даже противоположны по направлению. Следовательно, данный вариант имеет неблагоприятную зону зацепления на выходе, где наблюдается двукратное воздействие контакта на поверхности зуба колеса.

Таким образом, если изображение контактных линий позволяет представить характер скорости перемещения точек по поверхности, то изложенный метод дает возможность оценить эту скорость численно с высокой степенью точности.

2. Колчин Н.И. Обработка винтовых поверхностей эллиптическими и круговыми цилиндрами // Тр. Ленингр. механ. ин-та. — 1962. — № 23. — С. 39–47.